

1 Produit scalaire, orthogonalité

Exercice 1 ★ Produits scalaires sur \mathbb{R}^2 –

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 ?

1. $\varphi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$;
2. $\varphi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_2y_2$;
3. $\varphi_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2589]

Exercice 2 ★ Un produit scalaire sur les polynômes –

Soit $n \geq 1$ et soit a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2591]

Exercice 3 ★★ Des exemples de produit scalaire –

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ est telle que $w(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1033]

Exercice 4 ★★★ CNS pour avoir un produit scalaire –

Soit a et b des réels et $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que φ définisse un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2590]

Exercice 5 ★★★★★ Un produit scalaire sur les fonctions continues –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , et soit $a = (a_n)$ une suite de $[0, 1]$. On pose, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1038]

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme

Exercice 6 ★ Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz –

Démontrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3259]

Exercice 7 ★ Quand une inégalité en implique une autre... –

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1475]

Exercice 8 ★★ Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz –

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1036]

Exercice 9 ★★ Nature d'une série –

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq 2^{n/2} \sqrt{n+1}.$$

2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2197]

Exercice 10 ★★ Produit scalaire et théorème fondamental du calcul intégral –

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$f^2(t) \leq (t-a) \int_a^t f'^2(u) du.$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t) dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3253]

Exercice 11 ★★★ Un calcul de borne inférieure –

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Déterminer $\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1037]

Exercice 12 ★★ Stricte convexité de la boule –

Soit E un espace préhilbertien et soit $B = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. Démontrer que B est strictement convexe, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$, $x \neq y$ et tout $t \in]0, 1[$, $\|tx + (1-t)y\| < 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1039]

Exercice 13 ★★★ **Approximation au sens des moindres carrés –**

Soit E un espace préhilbertien et $x_1, \dots, x_p \in E$. Montrer que la fonction f définie sur E par $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$ atteint son minimum en $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$.

[Indication ▼](#)[Correction ▼](#)

[3258]

3 Orthogonalité

Exercice 14 ★ **Base de l'orthogonal –**

\mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les sous-espaces F et G de \mathbb{R}^4 définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z + t = 0 \text{ et } -x + 2y + 3z - t = 0\}$$

$$G = \text{vect}((1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, -1)).$$

Déterminer une base de F^\perp et de G^\perp .

[Indication ▼](#)[Correction ▼](#)

[3257]

Exercice 15 ★ **Système d'équations de l'orthogonal –**

\mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace G de \mathbb{R}^4 défini par :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}.$$

Déterminer un système d'équations de G^\perp .

[Indication ▼](#)[Correction ▼](#)

[3255]

Exercice 16 ★ **Une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité –**

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E . Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

[Indication ▼](#)[Correction ▼](#)

[2196]

Exercice 17 ★★★ **Relations usuelles sur les orthogonaux –**

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E . Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.

2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

3. $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$;

4. $\text{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

[Indication ▼](#)[Correction ▼](#)

[1042]

Exercice 18 ★★★ **Orthogonal –**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Que se passe-t-il en dimension finie ?

[Indication ▼](#)[Correction ▼](#)

[1043]

Exercice 19 ★★ ★ **Pas de supplémentaire orthogonal ! –**

On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1044]

4 Bases orthonormales

Exercice 20 ★ **Orthonormalisation de Schmidt –**

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (-1, -1, 0).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1045]

Exercice 21 ★★ **Base orthonormale d'un sous-espace –**

\mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace F de \mathbb{R}^4 défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3254]

Exercice 22 ★★ **Trouver une base orthonormale –**

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1047]

Exercice 23 ★★ ★ **Une caractérisation des bases orthonormales –**

Soit E un espace préhilbertien, et (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs de E de norme 1 tels que, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

Démontrer que E est de dimension n et que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1049]

Exercice 24 ★★ ★★ **Similitudes –**

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.

2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$.

3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement si f est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x, y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.

Prouver le sens direct. Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Conclure.

4. Prouver le sens direct.

5. Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

6. Conclure.

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[1048]

5 Projections orthogonales et calculs de distances

Exercice 25 ★ Projeté orthogonal dans \mathbb{R}^4 –

Dans \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F .

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[3263]

Exercice 26 ★★ Projection orthogonale dans \mathbb{R}^4 –

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) de E tels que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G .

2. Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p_G sur G .

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E . Déterminer la distance de x à G .

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[1055]

Exercice 27 ★★ Calcul du projeté orthogonal –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de x^2 sur $F = \text{vect}(1, x)$.

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[3260]

Exercice 28 ★ Distance à un hyperplan –

Dans \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u(3, 4, 3)$ au plan \mathcal{P} d'équation $2x + y - z = 0$.

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[3256]

Exercice 29 ★★ Projection dans un espace de matrices –

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N).$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F^\perp .

2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F^\perp .

3. Calculer la distance de J à F .

[Indication ▼](#)

[Correction ▼](#)

[2615]

Exercice 30 ★★ **Base orthonormale –**

Soit $E = {}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E; P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H .
2. Déterminer une base orthonormale de H .
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1051]

Exercice 31 ★★★ **Un produit scalaire sur les polynômes –**

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormée de E .
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \{P \in E; \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1052]

Exercice 32 ★★★ **Distance à un sous-espace ? –**

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a \cos(t) - b \sin(t))^2 dt$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3261]

Exercice 33 ★★★★★ **Méthode des moindres carrés –**

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique et on identifie \mathbb{R}^n avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^TAX = A^TB.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1714]

Exercice 34 ★★★★★ **Déterminants de Gram –**

Soit E un espace préhilbertien. Pour x_1, \dots, x_p des vecteurs de E , on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs x_1, \dots, x_p , et on note $G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de cette matrice.

1. Démontrer que (x_1, \dots, x_p) est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.
2. On suppose désormais que (x_1, \dots, x_p) est une famille libre, et on note $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit également $x \in E$. Démontrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. φ_1 est-elle bilinéaire ?
 2. φ_2 est-elle positive ?
 3. Écrire $\varphi_3((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ comme une somme de deux carrés.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant au moins $(n + 1)$ racines est le polynôme nul.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Le point difficile est de démontrer que la forme est définie. Utiliser le fait que si h est continue et positive, alors $\int_a^b h(t)dt = 0 \implies h \equiv 0$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Trouver une condition portant sur b pour que φ soit symétrique. Écrire ensuite $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ en reconnaissant le début d'un carré.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Tout tourne autour de la densité de a dans $[0, 1]$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Appliquer astucieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n avec les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (1, \dots, 1)$.
 2. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $y = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $z = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en écrivant $\sqrt{\binom{n}{k}} = 1 \times \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Écrire $f(t) = \int_a^t f'(u)du$ puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 2. Intégrer l'inégalité précédente.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit $\sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}}$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Montrer d'abord l'inégalité au sens large. Utiliser les cas d'égalité.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Écrire $x - x_i = x - m + m - x_i$.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Déterminer deux vecteurs u et v tels que $F = (\text{vect}(u, v))^\perp$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Commencer par chercher une base de G .

Indication pour l'exercice 16 ▲

Développer $\|x + \lambda y\|^2$.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Facile !
 2. Facile, par double inclusion.
 - 3.
 4. Utiliser le fait que $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
 5. Utiliser des conditions de dimension et la question précédente pour se ramener au cas où A est un sous-espace vectoriel.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Utiliser que si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$. En dimension finie, faire un raisonnement à l'aide des dimensions.

Indication pour l'exercice 19 ▲

On peut utiliser que si g est dans E , alors xg est dans F . Si F admet un supplémentaire orthogonal, on a toujours $F \oplus F^\perp = E$.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Il suffit de suivre le cours...

Indication pour l'exercice 21 ▲**Indication pour l'exercice 22 ▲**

Orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Démontrer d'abord qu'il s'agit d'une famille orthogonale. Pour démontrer qu'elle est génératrice, démontrer que, pour tout $x \in E$, on a

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Utiliser une formule de polarisation.
2. Utiliser une formule de polarisation.

3. Utiliser le résultat de la première question. Soit λ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda\|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i). Démontrer que f est une similitude de rapport λ .
 - 4.
 5. Utiliser le résultat de la première question.
 6. Soit λ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda\|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i). Démontrer que f est une similitude de rapport λ .
-

Indication pour l'exercice 25 ▲

Commencer par chercher une base (u_1, u_2) de F . Ensuite, on peut l'orthonormaliser puis utiliser la formule du projeté, ou écrire a priori que le projeté orthogonal de u s'écrit $au_1 + bu_2$ et trouver des conditions sur a et b .

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Commencer par trouver une base de G et l'orthonormaliser.
 2. Utiliser la formule de la projection en fonction d'une base orthonormée de l'espace sur lequel on projette.
 3. Utiliser la formule du cours !
-

Indication pour l'exercice 27 ▲

Indication pour l'exercice 28 ▲

Déterminer un vecteur normal au plan \mathcal{P} et appliquer la formule du cours.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Commencer par trouver une base de F , puis une base de F^\perp , puis la rendre orthonormale.
 2. Utiliser la formule donnant la projection sur un sous-espace dans une base orthonormée.
-

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. La dimension de H est 3. Il suffit de déterminer 3 vecteurs indépendants dans H . On peut aussi déterminer classiquement une base d'un hyperplan, comme on le fait toujours !
 2. Procédé de Gram-Schmidt.
 3. C'est des formules du cours, ou à base du théorème de Pythagore !
-

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.
 2. Penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange.
 3. Trouver un polynôme R orthogonal à l'hyperplan H et appliquer une formule du cours.
-

Indication pour l'exercice 32 ▲

Faire apparaître ceci comme un problème de calcul de distance à un sous-espace de dimension 2 dans un bon espace préhilbertien.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Interpréter en terme de projection orthogonale, et remarquer que A est injective.
 2. Écrire que AX_0 doit être un projeté orthogonal, écrire donc que $AX_0 - B$ doit être orthogonal à tous les vecteurs, etc...
 3. Interpréter ce problème en les termes des deux questions précédentes. Pour trouver le minimum, on utilisera la question 2 qui donnera un système à résoudre.
-

Indication pour l'exercice 34 ▲

-
1. Démontrer d'abord que si la famille est liée, alors le déterminant est nul. Pour la réciproque, partir de $G(x_1, \dots, x_p) = 0$, écrire une relation de liaison sur les colonnes, regarder ce que cela donne ligne par ligne, et faire une combinaison linéaire astucieuse de ces lignes...
 2. Écrire $x = u + v$, où $u \in F$ et $v \in F^\perp$, et décomposer le déterminant en tenant compte de cette somme. Rappelons que $d(x, F) = \|v\|$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. φ_1 n'est pas bilinéaire. Posons en effet $u = (1, 1)$. Si φ_1 était bilinéaire, on devrait avoir $\varphi_1(2u, u) = 2\varphi_1(u, u)$. Mais $\varphi_1(2u, u) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ alors que $\varphi_1(u, u) = \sqrt{4}$. On n'a pas $\sqrt{10} = 2\sqrt{4}$.
2. φ_2 n'est pas positive : en effet, si $u = (0, 1)$, alors $\varphi_2(u, u) = -1 < 0$. Donc φ_2 n'est pas un produit scalaire.
3. φ_3 est bilinéaire et symétrique. De plus, on a

$$\begin{aligned}\varphi_3((x_1, x_2), (x_1, x_2)) &= x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_2 + 10x_2^2 \\ &= x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2 \\ &= (x_1 - 3x_2)^2 + x_2^2.\end{aligned}$$

Ceci est positif ou nul (somme de deux carrés), et si c'est nul, alors on a à la fois $x_2^2 = 0$ (et donc $x_2 = 0$) et $x_1 - 3x_2 = 0$, donc $x_1 = 3x_2 = 0$. Ainsi, φ_3 est définie positive. C'est donc bien un produit scalaire.

Correction de l'exercice 2 ▲

Il est d'une part très facile (et laisser au lecteur) de vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique (ie $\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q)$ et $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$). D'autre part, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P, P) = \sum_{i=0}^n (P(a_i))^2$. Cette quantité est positive ou nulle. De plus, si elle est nulle, c'est-à-dire si $\varphi(P, P) = 0$, alors comme on considère la somme de $n+1$ quantités positives ou nulles, chacune de ces quantités doit être nulle, et donc, pour tout $i = 0, \dots, n$, on a $P(a_i) = 0$. Ainsi, P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant au moins $n+1$ racines. Ainsi, P est le polynôme nul. On a donc démontré que φ est une forme bilinéaire, symétrique, et définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Dans les deux exemples, la difficulté est de démontrer qu'on a affaire à une forme définie.

1. Si $\langle f, f \rangle = 0$, alors on a à la fois $(f(0))^2 = 0$, donc $f(0) = 0$, et

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0.$$

Or, $(f')^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est que f' est nulle sur $[0, 1]$. On en déduit que f est constante sur $[0, 1]$, puis, comme $f(0) = 0$, que f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

2. Si $f \in E$ est tel que $\langle f, f \rangle = 0$, le même raisonnement donne que $f^2 w = 0$ sur $[a, b]$, donc, puisque w ne s'annule pas sur $]a, b[$, que $f = 0$ sur $]a, b[$. Par continuité, on en déduit que $f = 0$ sur $[a, b]$ et donc que $f \equiv 0$. La forme est bien définie positive.
-

Correction de l'exercice 4 ▲

On remarque d'abord que φ est une forme bilinéaire. Pour qu'elle soit symétrique, il est nécessaire que $b = 4$. En effet, on doit avoir

$$\varphi((1, 0), (0, 1)) = \varphi((0, 1), (1, 0)) \implies b = 4.$$

On vérifie facilement que cette condition est aussi suffisante pour que φ soit symétrique. On va ensuite trouver une condition portant sur a pour que φ soit définie positive. On a

$$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 8x_1x_2 + ax_2^2 = (x_1 + 4x_2)^2 + (a - 16)x_2^2.$$

Si $a \leq 16$, alors φ n'est pas définie positive. En effet, on a

$$\varphi((-4, 1), (-4, 1)) = (a - 16) \leq 0.$$

Réciproquement, si $a > 16$, alors $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) \geq 0$ et si $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$, alors on a

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne facilement $x_1 = x_2 = 0$. En conclusion, ϕ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $b = 4$ et $a > 16$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Remarquons d'abord que ϕ est bien définie. En effet, les fonctions f et g étant continues sur le segment $[0, 1]$, elles y sont bornées par une constante $M > 0$, et donc on a

$$\left| \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n) \right| \leq \frac{M^2}{2^n},$$

et la série qui définit $\phi(f, g)$ converge absolument. De plus, il est très facile de vérifier que ϕ est une forme bilinéaire, symétrique et positive. On doit donc trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que ce soit une forme définie. D'abord, si a est dense dans $[0, 1]$, alors ϕ est définie. En effet, si

$$\phi(f, f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^2(a_n)}{2^n} = 0,$$

alors on a

$$\forall n \geq 0, f^2(a_n) = 0 \implies f(a_n) = 0.$$

Si a est dense dans $[0, 1]$, ceci entraîne que $f = 0$ et donc que ϕ est définie. Réciproquement, on suppose que a n'est pas dense dans $[0, 1]$, et on prouve que ϕ n'est pas définie. Mais si a n'est pas dense dans $[0, 1]$, on peut trouver un intervalle $I \subset [0, 1]$, non réduit à un point, et qui ne comprend aucun terme de la suite (a_n) . Soit alors $f \in E$ une fonction (continue) nulle sur $[0, 1] \setminus I$ et valant 1 au milieu de I (pensez à une fonction f dont la courbe représentative est une dent). Alors, $f(a_n) = 0$ pour tout entier n puisque a_n n'est jamais élément de I , et donc $\phi(f, f) = 0$, alors que $f \neq 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (2^{-1}, \dots, 2^{-n})$. Il vient

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

Par croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}_+ , et en utilisant la formule donnant la somme d'une suite géométrique, on trouve

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 &\leq \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \\ &\leq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Il suffit d'écrire :

$$x + y + z = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}x + 1 \times y + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}z.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^3), on a

$$(x + y + z)^2 \leq \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) \times (2x^2 + y^2 + 5z^2) \leq \frac{17}{10}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n avec les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (1, \dots, 1)$. On trouve

$$0 \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \times 1 \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n 1^2 \right)^{1/2}.$$

Il suffit de prendre le carré pour obtenir l'inégalité désirée, puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs (x_1, \dots, x_n) et $(1, \dots, 1)$ sont liés; autrement dit, si et seulement si tous les x_i sont égaux.

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $y = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $z = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$. Alors on trouve

$$n = \sum_{k=1}^n y_k z_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{1/2}$$

ce qui, mis au carré, donne l'inégalité demandée. Comme précédemment, on a égalité si et seulement si les vecteurs y et z sont liés. Puisqu'ils sont tous les deux à coordonnées strictement positives, c'est équivalent à dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_k = \frac{\lambda}{x_k}$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Ainsi, il y a égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. On va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en écrivant $\sqrt{\binom{n}{k}} = 1 \times \sqrt{\binom{n}{k}}$. Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} &\leq \left(\sum_{k=0}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^{1/2} \\ &\leq (n+1)^{1/2} 2^{n/2}. \end{aligned}$$

2. On en déduit que

$$0 \leq u_n \leq \frac{(n+1)^{1/2}}{n^2} \leq \frac{(2n)^{1/2}}{n^2} = \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}.$$

Par majoration par une série de Riemann convergente, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 et s'annule en a , on a par le théorème fondamental du calcul intégral

$$f(t) = \int_a^t f'(u) du = \int_a^t 1 \times f'(u) du.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} f^2(t) &\leq \left(\int_a^t 1 du \right) \left(\int_a^t f'^2(u) du \right) \\ &\leq (t-a) \int_a^t f'^2(u) du \\ &\leq (t-a) \int_a^b f'^2(u) du \end{aligned}$$

puisque $f'^2 \geq 0$ et que $t \in [a, b]$. On intègre ensuite cette inégalité pour $t \in [a, b]$, et on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t) dt &\leq \left(\int_a^b (t-a) dt \right) \left(\int_a^b f'^2(u) du \right) \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Utilisons le produit scalaire canonique sur $F = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f g.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire avec le produit $\sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}}$. On obtient

$$b-a = \int_a^b \sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}} \leq \left(\int_a^b f \right)^{1/2} \times \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right)^{1/2}.$$

Prenant le carré, on trouve que, pour tout $f \in E$,

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}.$$

De plus, pour $f = 1$, qui est élément de E , on a clairement égalité. Ainsi, la borne inférieure recherchée vaut $(b-a)^2$ et est atteinte par la fonction identiquement égale à 1 (plus généralement, par les fonctions constantes).

Correction de l'exercice 12 ▲

Soient $x \neq y$ dans B , et $0 < t < 1$. Prouvons d'abord l'inégalité au sens large :

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1.$$

Pour que l'on ait égalité, il faut que les deux inégalités soient des égalités, ce qui entraîne :

il existe $\lambda \in ^+$ tel que $tx = \lambda(1-t)y$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour une norme issue d'un produit scalaire); $\|x\| = \|y\| = 1$.

Ces deux conditions ensemble entraînent alors que $x = y$, ce qui est impossible par hypothèse.

Correction de l'exercice 13 ▲

On va passer par m : pour cela, on écrit $x - x_i = x - m + m - x_i$ de sorte que

$$\|x - x_i\|^2 = \|x - m\|^2 + 2\langle x - m, m - x_i \rangle + \|m - x_i\|^2.$$

Il vient, en faisant la somme

$$\begin{aligned} f(x) &= p\|x - m\|^2 + 2 \sum_{i=1}^p \langle x - m, m - x_i \rangle + f(m) \\ &= p\|x - m\|^2 + 2 \left\langle x - m, \sum_{i=1}^p (m - x_i) \right\rangle + f(m) \\ &= p\|x - m\|^2 + 2\langle x - m, pm - pm \rangle + f(m) \\ &= p\|x - m\|^2 + f(m) \geq f(m). \end{aligned}$$

Ainsi, f atteint son minimum en m .

Correction de l'exercice 14 ▲

Notons $u = (1, -1, 2, 1)$ et $v = (-1, 2, 3, -1)$. Alors on a

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff (x, y, z, t) \perp u \text{ et } (x, y, z, t) \perp v \\ &\iff (x, y, z, t) \perp \text{vect}(u, v).\end{aligned}$$

Ainsi, $F = (\text{vect}(u, v))^\perp$. Puisqu'on est en dimension finie, on a pour tout sous-espace E de \mathbb{R}^4 : $(E^\perp)^\perp = E$. On conclut que $F^\perp = \text{vect}(u, v)$. Ainsi, puisque (u, v) est une famille libre, (u, v) est une base de F^\perp . Remarquons ensuite que

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in G^\perp &\iff (x, y, z, t) \perp (1, 1, 1, 0) \text{ et } (x, y, z, t) \perp (2, 1, 1, -1) \\ &\iff x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \\ t = x \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit qu'une famille génératrice de G^\perp est donnée par les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, -1, 1, 0)$. Ces vecteurs étant linéairement indépendants, ils forment une base de G^\perp .

Correction de l'exercice 15 ▲

On commence par chercher une base de G . On remarque que

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in G &\iff \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y + z - t = 5z - t \\ y = -4z \\ z = z \\ t = t \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $u_1 = (5, -4, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$, on sait que (u_1, u_2) est une base de G . On détermine alors facilement un système d'équations pour G^\perp :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in G^\perp &\iff (x, y, z, t) \perp u_1 \text{ et } (x, y, z, t) \perp u_2 \\ &\iff \begin{cases} 5x - 4y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Remarquons que, puisque tout est positif, l'inégalité est équivalente à $\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$. Or,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

et donc l'inégalité est équivalente à

$$2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0.$$

Supposons d'abord que x est orthogonal à y , et donc que $\langle x, y \rangle = 0$. Alors l'inégalité précédente est bien vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0.$$

Si $y = 0$, l'inégalité $2\lambda \langle x, y \rangle \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ entraîne $\langle x, y \rangle = 0$. Si $y \neq 0$, alors $2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$ est un polynôme du second degré en λ qui est toujours positif ou nul. Le discriminant de ce polynôme doit donc être négatif ou nul, ce qui signifie que $4\langle x, y \rangle^2 \leq 0$. Ceci n'est possible que si $\langle x, y \rangle = 0$, c'est-à-dire si x et y sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.
2. On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y \rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se résout de la même façon.
3. D'après la première question, puisque $A \subset \text{vect}(A)$, on a

$$\text{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$

Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \text{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments a_1, \dots, a_n de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle &= \langle y, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \rangle \\ &= \lambda_1 \langle y, a_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle y, a_n \rangle \\ &= \lambda_1 0 + \dots + \lambda_n 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $y \in \text{vect}(A)^\perp$.

4. On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in (A^\perp)^\perp$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A . Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.

5. Notons $B = \text{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,

$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$

D'autre part,

$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux !

Correction de l'exercice 18 ▲

On remarque d'abord que si $A \subset B$, alors on a $B^\perp \subset A^\perp$, ce qui est immédiat en appliquant la définition. Ainsi, puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on obtient $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Prenons maintenant $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Tout $z \in F + G$ s'écrit $z = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors :

$$(x, z) = (x, f) + (x, g) = 0,$$

ce qui prouve que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$. D'autre part, on a $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, ce qui donne respectivement $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Puisque $(F \cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition,

et donc on a $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Dans le cas où E est un espace de dimension finie, on peut obtenir l'autre inclusion en comparant les dimensions des sous-espaces :

$$\begin{aligned}\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\ &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F + G)^\perp \\ &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F + G) \\ &= \dim(E) - \dim(F \cap G) \\ &= \dim((F \cap G)^\perp).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit $g \in F^\perp$. Remarquons que la fonction h définie par $h(x) = xg(x)$ est dans F . On en déduit que $(g, h) = 0$, ce qui donne $\int_0^1 xg^2(x) = 0$. Or, la fonction $x \mapsto xg^2(x)$ est positive et continue sur $[0, 1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est qu'il s'agit de la fonction identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = 0$. Maintenant, g est continue, et donc on obtient que g est identiquement nulle. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$. D'autre part, si F admettait un supplémentaire orthogonal, on aurait $F \oplus F^\perp = E$. Ici, $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal !

Correction de l'exercice 20 ▲

Le premier vecteur est simplement $\frac{u}{\|u\|}$. Puisque $\|u\| = \sqrt{2}$, on a

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Cherchons ensuite e'_2 sous la forme $e'_2 = v + \lambda e_1$ de sorte que $\langle e'_2, e_1 \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned}\langle e'_2, e_1 \rangle &= \langle v, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} + \lambda \\ &= \sqrt{2} + \lambda.\end{aligned}$$

On doit donc avoir $\lambda = -\sqrt{2}$ ce qui donne

$$e'_2 = (0, 1, 0).$$

Il est déjà normalisé et donc on pose $e_2 = (0, 1, 0)$. Cherchons ensuite e'_3 sous la forme

$$e'_3 = w + \lambda e_1 + \mu e_2$$

de sorte que $\langle e'_3, e_1 \rangle = 0$ et $\langle e'_3, e_2 \rangle = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}\langle e'_3, e_1 \rangle &= \langle w, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda\end{aligned}$$

d'où il vient $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\langle e'_3, e_2 \rangle &= \langle w, e_2 \rangle + \mu \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= -1 + \mu\end{aligned}$$

d'où $\mu = 1$. On en déduit que

$$e'_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right).$$

On normalise ce vecteur, et on trouve

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Correction de l'exercice 21 ▲

On commence par chercher une base de F . On remarque que

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x &= -z - t \\ y &= x + z = -t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -z - t \\ y &= -t \\ z &= z \\ t &= t \end{cases}\end{aligned}$$

Posons alors $u_1 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, -1, 0, 1)$. Alors (u_1, u_2) est une base de F . Malheureusement, elle n'est pas orthonormale. On l'orthonormalise en posant

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0).$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned}u'_2 &= u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \\ &= (-1, -1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0) \\ &= (-1/2, -1, -1/2, 1)\end{aligned}$$

de sorte que $\langle u'_2, v_1 \rangle = 0$. On normalise enfin u'_2 en posant

$$v_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(-1/2, -1, -1/2, 1).$$

La famille (v_1, v_2) est une base orthonormale de F .

Correction de l'exercice 22 ▲

On va orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$. Commençons par normaliser 1. Sa norme est $\sqrt{2}$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Considérons ensuite

$$Q_1(X) = X + \lambda P$$

où λ est choisi de sorte que $\langle Q_1, P \rangle = 0$. Mais,

$$\langle Q_1, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} dt + \lambda \langle P, P \rangle = \lambda.$$

On doit donc avoir $\lambda = 0$ (en réalité, les deux vecteurs 1 et X sont déjà orthogonaux !), et donc $Q_1 = X$. On normalise ce vecteur en

$$Q(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$

On pose enfin

$$R_1 = X^2 + \lambda P + \mu Q$$

de sorte que $\langle R_1, P \rangle = 0$ et $\langle R_1, Q \rangle = 0$. Mais, X^2 est déjà orthogonal à X , et donc par un calcul similaire au précédent, on va trouver que $\mu = 0$. D'autre part,

$$\langle R_1, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t^2 dt + \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3} + \lambda.$$

On trouve $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et donc

$$R_1(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Reste à normaliser ce vecteur en

$$R(X) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1).$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction de l'exercice 23 ▲

On va prouver que la famille est libre et génératrice. D'une part, si on applique l'égalité avec e_j , on obtient :

$$1 = 1 + \sum_{k \neq j} \langle e_k, e_j \rangle^2.$$

Ainsi, pour tout $k \neq j$, on a $\langle e_k, e_j \rangle = 0$, et la famille est orthogonale. Ainsi, c'est une famille libre. De plus, elle est génératrice. Prenons en effet $x \in E$, et posons

$$y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

On va prouver que $x = y$. Pour cela, on remarque que, puisque la famille est orthogonale, on a $\langle x, e_k \rangle = \langle y, e_k \rangle$. Or,

$$\|x - y\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x - y, e_k \rangle^2 = 0.$$

Donc $x = y$. (e_1, \dots, e_n) est donc une base orthonormale de E , qui est de dimension n (ceci n'était pas précisé au début de l'énoncé). Une autre façon de prouver que la famille est génératrice est de considérer F le sous-espace de E engendré par (e_1, \dots, e_n) . Il s'agit d'un sous-espace de dimension finie de E . On peut donc considérer p la projection orthogonale sur F . Pour tout $x \in E$, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Or,

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \implies \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2.$$

On en déduit que $\|x - p(x)\| = 0$, ou encore que $p(x) = x$, ou encore que $x \in F$, ce qui achève la preuve de $F = E$.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On va utiliser la formule de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Si on applique cette formule à $x = u + v$ et $y = u - v$, x et y sont orthogonaux et on trouve $\|u\| = \|v\|$.

2. Bien sûr, le sens réciproque est trivial puisqu'il suffit de choisir $x = y$. Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$. Alors, par la formule de polarisation rappelée ci-dessus qu'on utilise deux fois :

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\lambda^2 \|x+y\|^2 - \lambda^2 \|x-y\|^2) \\ &= \frac{\lambda^2}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ &= \lambda^2 \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

3. C'est trivial d'après la question précédente. On sait que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$. Et d'après la première question, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit $\lambda > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda \|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i d'après la question précédente, et est strictement positif sinon f serait nulle). On va démontrer que f est une similitude de rapport λ . Soit $x \in E$ qui s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

La famille $(f(e_i))$ étant orthogonale, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \|f(e_i)\|^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \\ &= \lambda^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

f est bien une similitude de rapport λ .

4. C'est trivial d'après la question précédente.

5. On sait que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$. Et d'après la première question, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

6. Soit $\lambda > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda \|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i d'après la question précédente, et est strictement positif sinon f serait nulle). On va démontrer que f est une similitude de rapport λ . Soit $x \in E$ qui s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

La famille $(f(e_i))$ étant orthogonale, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \|f(e_i)\|^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \\ &= \lambda^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

f est bien une similitude de rapport λ .

Correction de l'exercice 25 ▲

On commence par rechercher une base de F . Pour cela on écrit que

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x+y+t = 0 \\ x+y+2z-t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y+t = 0 \\ 2z-2t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = -y-t \\ y = y \\ z = t \\ t = t \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1, 1)$, on trouve que (u_1, u_2) est une base de F . Notons ensuite $p_F(u)$ le projeté orthogonal de u sur F et donnons deux méthodes pour le calculer. Une première méthode consiste à écrire que $p_F(u) = au_1 + bu_2 = (-a-b, a, b, b)$ de sorte que $u - p_F(u) = (1+a+b, 8-a, 1-b, 1-b)$. On sait que $u - p_F(u) \perp u_1$. Calculant le produit scalaire, on trouve

$$-1 - a - b + 8 - a = 0 \iff 2a + b = 7.$$

On sait aussi que $u - p_F(u) \perp u_2$ et toujours avec l'aide du produit scalaire :

$$-1 - a - b + 1 - b + 1 - b = 0 \iff a + 3b = 1.$$

Ainsi, (a, b) est solution du système suivant, que l'on va résoudre :

$$\begin{aligned}\begin{cases} a+3b = 1 \\ 2a+b = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+3b = 1 \\ -5b = 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

On trouve $p_F(u) = (-3, 4, -1, -1)$. Deuxième méthode : on va orthonormaliser la base (u_1, u_2) . Puisque $\|u_1\| = \sqrt{2}$, on pose

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0).$$

On cherche ensuite $u'_2 = u_2 + \alpha v_1$ de sorte que $\langle u'_2, v_1 \rangle = 0$. Ceci donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On obtient

$$u'_2 = (-1, 0, 1, 1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

D'autre part,

$$\|u'_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{10}{4}$$

et donc on pose

$$v_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, -1, 2, 2).$$

On sait ensuite que $p_F(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2$. Or,

$$\langle u, v_1 \rangle = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ et } \langle u, v_2 \rangle = \frac{-5}{\sqrt{10}}$$

de sorte que

$$\langle u, v_1 \rangle v_1 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$$

et

$$\langle u, v_2 \rangle v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1 \right).$$

Après un dernier petit calcul, on retrouve bien $p_F(u) = (-3, 4, -1, -1)$.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. On commence par trouver une base de G . Mais on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}.$$

On en déduit que $(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$ est une base de G . Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser. Si on pose $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$, alors (u_1, u_2) est une base orthonormale de G .

2. On va calculer $p_G(e_i)$ par la formule

$$p_G(e_i) = \langle e_i, u_1 \rangle u_1 + \langle e_i, u_2 \rangle u_2.$$

On en déduit que la matrice de p_G dans la base canonique est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On sait que $d(x, G) = \|x - p_G(x)\|$. Écrivons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Alors

$$p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2, -x_1 + x_2, x_3 - x_4, -x_3 + x_4)$$

et donc

$$x - p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 + x_4).$$

Il vient

$$d(x, G)^2 = \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2).$$

Correction de l'exercice 27 ▲

On va étudier deux façons de répondre à cet exercice. La première consiste à calculer une base orthonormée de F , et d'utiliser l'expression de la projection dans une base orthonormée. Posons $e_1 = 1$ et $e_2 = x$, qui est une base de $F = \text{vect}(1, x)$. On va orthonormaliser cette base en une base orthonormale (u_1, u_2) . D'abord on a

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = 1.$$

Ensuite, on cherche $u'_2 \in \text{vect}(u_1, e_2)$ tel que $u'_2 \perp u_1$. Pour cela, on écrit $u'_2 = e_2 + \lambda_1 u_1$. On a

$$\begin{aligned} u'_2 \perp u_1 &\iff \langle u'_2, u_1 \rangle = 0 \\ &\iff \langle e_1, u_1 \rangle + \lambda_1 = 0 \\ &\iff \int_0^1 x dx + \lambda_1 = 0 \\ &\iff \lambda_1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u'_2 = x - \frac{1}{2}$ est orthogonal à u_1 et $\text{vect}(u_1, u'_2) = \text{vect}(e_1, e_2)$. On normalise ensuite u'_2 :

$$\|u'_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{12}$$

et

$$u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = \sqrt{12}u'_2 = \sqrt{3}(2x - 1).$$

Il vient alors

$$p_F(x^2) = \langle x^2, u_2 \rangle u_2 + \langle x^2, u_1 \rangle u_1.$$

Or

$$\langle x^2, u_2 \rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2x^3 - x^2) dx = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

et

$$\langle x^2, u_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

On obtient pour conclure

$$p_F(x^2) = \frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{3} = x - \frac{1}{6}.$$

L'autre méthode consiste à écrire a priori que $p_F(x^2) = ax + b$ puis à déterminer a et b en écrivant que

$$\begin{aligned} x^2 - p_F(x^2) \perp 1 &\iff \langle x^2 - ax - b, 1 \rangle = 0 \\ &\iff \int_0^1 (x^2 - ax - b) dx = 0 \\ &\iff \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^2 - p_F(x^2) \perp x &\iff \langle x^2 - ax - b, x \rangle = 0 \\ &\iff \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx) dx = 0 \\ &\iff \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0. \end{aligned}$$

On obtient un système que l'on résout facilement :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/6. \end{cases}$$

On retrouve bien sûr le même projeté orthogonal $p_F(x^2) = x - \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 28 ▲

Un vecteur normal à \mathcal{P} est donnée par $v = (2, 1, -1)$. Ainsi, par une formule du cours,

$$d(u, \mathcal{P}) = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Correction de l'exercice 29 ▲

1. On remarque d'abord qu'une matrice M appartient à F si et seulement si elle s'écrit $aI_2 + bK$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, F est l'espace vectoriel engendré par les matrices I_2 et K . Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ un élément de E . Alors M est élément de F^\perp si et seulement si M est orthogonale à I_2 et à K . Maintenant,

$$\langle M, I_2 \rangle = x + t \text{ et } \langle M, K \rangle = y - z.$$

Ainsi, M est élément de F^\perp si et seulement si $t = -x$ et $z = y$. Autrement dit, on a prouvé que

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Une base de F^\perp est donnée par (A, B) , avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va orthonormaliser cette base pour obtenir une base orthonormale de F^\perp . On ne va pas avoir à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, car A et B sont déjà orthogonales : $\langle A, B \rangle = 0$. De plus,

$$\|A\| = \|B\| = \sqrt{2}$$

comme le montre un rapide calcul. Si on pose

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}A \text{ et } B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}B,$$

alors (A_1, B_1) est une base orthonormée de F^\perp .

2. Il suffit d'appliquer le résultat qui exprime le projeté dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned} p_{F^\perp}(J) &= \langle J, A_1 \rangle A_1 + \langle J, B_1 \rangle B_1 \\ &= 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} B_1 \\ &= B. \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\text{dist}(J, F) = \|J - p_F(J)\| = \|p_{F^\perp}(J)\| = \|B\| = \sqrt{2}.$$

Correction de l'exercice 30 ▲

1. Puisque H est un hyperplan de ${}_3[X]$ (c'est le noyau d'une forme linéaire), sa dimension est 3. Pour trouver une base de H , il suffit de trouver trois vecteurs indépendants. Posons par exemple $R_1(X) = X - 1$, $R_2(X) = X^2 - X$ et $R_3(X) = X^3 - X^2$. (R_1, R_2, R_3) est une famille de 3 éléments de H , qui est libre car les degrés respectifs des R_i sont distincts. On a donc bien une base de l'hyperplan. Il est possible aussi de déterminer une base de l'hyperplan comme on le fait usuellement quand on connaît l'équation d'un sous-espace vectoriel. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a donc

$$\begin{aligned} P \in H &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &\iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff \begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 = a_1 \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = a_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette méthode donne comme base $(X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2)$.

2. Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de l'une des bases construites à la question précédente. On a donc :

$$P_1 = R_1 / \|R_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1).$$

Posons $P'_2 = R_2 + \lambda P_1$, avec λ de sorte que $(P'_2, P_1) = 0$, ce qui entraîne $\lambda = -(P_1, R_2)$. Après normalisation, on trouve

$$P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (X + 1)/2).$$

On procède de même pour P_3 , et on trouve

$$P_3 = \sqrt{\frac{3}{4}} (X^3 - (X^2 + X + 1)/3).$$

3. On a

$$P_H(x) = \sum_{j=1}^3 (X, P_j) P_j = \frac{-1}{4} (X^3 + X^2 - 3X + 1).$$

Il vient :

$$d^2(x, H) = \|x\|^2 - \|P_H(x)\|^2 = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Si on n'avait pas calculé une base orthonormale de H , on aurait pu remarquer que le polynôme $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ est normal à l'hyperplan H et donc que

$$d(X, H) = \frac{|\langle X, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Il est clair qu'on définit ainsi une forme bilinéaire symétrique et que $\langle P, P \rangle \geq 0$. De plus, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^n P^2(a_k) = 0 \implies P(a_k) = 0 \text{ pour } k = 0, \dots, n.$$

Or, un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n+1$ racines est le polynôme nul. Donc $P = 0$ et la forme bilinéaire est définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Contrairement à ce que l'on fait souvent, ici, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale n'est pas la bonne idée. Il faut plutôt raisonner en terme de racines et voir que si P s'annule en beaucoup de a_k , alors $P(a_k)Q(a_k)$ sera souvent nul. On va donc définir, pour $k = 0, \dots, n$

$$P_k = \prod_{j \neq k} (X - a_j).$$

Il est clair que, pour $k \neq l$, on a

$$\langle P_k, P_l \rangle = P_k(a_k) P_l(a_k) = 0.$$

La famille est donc orthogonale. On l'orthonormalise en remarquant que

$$\|P_k\|^2 = \prod_{j \neq k} (a_k - a_j)^2$$

et on pose donc

$$Q_k = \frac{P_k}{\prod_{j \neq k} (a_k - a_j)}.$$

(Q_0, \dots, Q_n) est une famille orthonormale de $n+1$ éléments dans un espace de dimension $n+1$. C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On va trouver un vecteur normal à l'hyperplan H . C'est très facile en regardant la définition de H , car si on pose $R = 1$, on a

$$\langle P, R \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k).$$

R est donc un vecteur normal à H . Par une formule du cours (très facile à retrouver par un dessin), on en déduit que la distance de Q à H est

$$\frac{|\langle Q, R \rangle|}{\|R\|} = \frac{|\sum_{k=0}^n Q(a_k)|}{\sqrt{n+1}}.$$

Correction de l'exercice 32 ▲

On va faire apparaître ceci comme un problème de calcul de distance à un sous-espace de dimension 2 dans un bon espace préhilbertien. Pour cela, on pose $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. On cherche à calculer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \|t - a \sin - b \cos\|^2.$$

Posons $F = \text{vect}(\sin, \cos)$. Alors $\{a \sin + b \cos : a, b \in \mathbb{R}\} = F$ et ce que l'on cherche est ni plus ni moins que

$$\inf_{f \in F} \|t - f\|^2.$$

Puisque F est de dimension finie, cela revient à calculer le projeté orthogonal $p_F(t)$ de t sur F , puisqu'alors

$$\inf_{f \in F} \|t - f\|^2 = \|t - p_F(t)\|^2 = \|t\|^2 - \|p_F(t)\|^2.$$

Reste à calculer $p_F(t)$. Il y a plusieurs façons de s'y prendre. Ici, il est facile de voir que

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0$$

et donc que la famille (\sin, \cos) est déjà une base orthogonale de F . On la normalise en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

De même on prouve que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi.$$

Ainsi, $\left(\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}\right)$ est une base orthonormée de F . On a alors

$$\begin{aligned} p_F(t) &= \left\langle t, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} + \left\langle t, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= \langle t, \cos \rangle \frac{\cos}{\pi} + \langle t, \sin \rangle \frac{\sin}{\pi}. \end{aligned}$$

Il reste à calculer ces deux produits scalaires. Pour cela, on remarque que, par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t e^{it} dt &= \left[t \frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{i} e^{it} dt \\ &= -2i\pi + [e^{it}]_0^{2\pi} \\ &= -2i\pi. \end{aligned}$$

En particulier, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on trouve

$$\int_0^{2\pi} t \cos(t) dt = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} t \sin(t) dt = -2\pi.$$

Finalement, on a

$$p_F(t) = -2 \sin.$$

Pour conclure,

$$\begin{aligned} \inf_{f \in F} \|t - f\|^2 &= \|t\|^2 - \|p_F(t)\|^2 \\ &= \int_0^{2\pi} t^2 dt - \int_0^{2\pi} 4 \sin^2(t) dt \\ &= \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi \end{aligned}$$

Il convient ici de distinguer ce qui est du calcul technique d'intégrale et ce qui relève des espaces préhilbertiens.

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Puisque A est de rang p , l'application $X \mapsto AX$ qui va de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\text{Im}(A)$ est injective. Or, $\inf\{\|AX - B\|; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ est la distance de B à $\text{Im}(A)$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\text{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B . Ce projeté orthogonal s'écrit de façon unique AX_0 .

2. On a

$$\begin{aligned} AX_0 = p_{\text{Im}(A)}(B) &\iff \forall Z \in \text{Im}(A), AX_0 - B \perp Z \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX_0 - B \perp AX \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), (AX)^T(AX_0 - B) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), X^T(A^TAX_0 - A^TB) = 0 \\ &\iff A^TAX_0 = A^TB. \end{aligned}$$

X_0 est donc bien l'unique solution de $A^TAX = A^TB$.

3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que le rang de A est 2. La borne inférieure

est donc atteinte en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ solution de $A^TAX_0 = A^TB$. Or

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A^TB = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On résout alors l'équation et on trouve que $x_0 = -1/2$ et $y_0 = 0$, et donc l'inf recherché vaut $7/2$.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. D'abord, remarquons que si (x_1, \dots, x_p) est une famille liée, un des vecteurs, disons le j -ième, est combinaison linéaire des autres. Mais alors cette relation se reporte sur la matrice de Gram, dont la j -ième colonne est combinaison linéaire des autres. Et donc $G(x_1, \dots, x_p) = 0$. Supposons ensuite que $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$. Les vecteurs colonnes de la matrice de Gram sont donc liés. Ceci signifie qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$\langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, x_i \rangle = 0.$$

On obtient ainsi p relations. Multiplions la première par λ_1 , la deuxième par λ_2 , etc..., et faisons la somme de ces relations. Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve :

$$\langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \rangle = \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p\|^2 = 0.$$

Autrement dit, on a

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$$

et donc la famille (x_1, \dots, x_p) est liée.

2. Écrivons $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$, et rappelons que $d(x, F) = \|v\|$. Si on regarde la matrice de Gram associée, et tenant compte de l'orthogonalité de v avec les autres vecteurs x_1, \dots, x_p , on trouve :

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 + \|v\|^2 & \langle u, x_1 \rangle & \dots & \langle u, x_p \rangle \\ \langle x_1, u \rangle + 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p, u \rangle + 0 & \langle x_p, x_1 \rangle & \dots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Par multilinéarité du déterminant, et en inspectant la première colonne, on trouve

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = G(u, x_1, \dots, x_p) + \begin{vmatrix} \|v\|^2 & \langle u, x_1 \rangle & \dots & \langle u, x_p \rangle \\ 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_p, x_1 \rangle & \dots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Mais $G(u, x_1, \dots, x_p)$ est nul car la famille (u, x_1, \dots, x_p) est liée. Le second déterminant est lui égal à $\|v\|^2 G(x_1, \dots, x_p)$, ce qui achève la preuve.
